TD de *Sémantique des langages de programmation* n° 6

Congruences, termes et paires critiques

Exercice 1 *Montrer que la relation* $\sim = \{(x, y) \mid 5$ *est un diviseur de* $x - y\}$ *est une congruence sur l'algèbre* $< I\!N, \{+/2, \cdot/2\} >$ *(*$\sim$ *est une relation d'équivalence et la somme et multiplication sont monotones par rapport à* $\sim$*).*

Exercice 2
Rappel:
Sous-terme

- $t|_\Lambda = t$
- $f(t_1, \ldots, t_n)|_{iq} = t_i|_q$

Remplacement

- $t[v]_\Lambda = v$
- $f(t_1, \ldots, t_n)[v]_{ip} = f(t_1, \ldots, t_i[v]_p, \ldots, t_n)$

Montrer les propriétés suivantes:

- *Si* $p \in Pos(s)$ *et* $q \in Pos(t)$*, alors* $(s[t]_p)|_{p.q} = t|_q$ *et* $(s[t]_p)[r]_{p.q} = s[t[r]_q]_p$.
- *Si* $p.q \in Pos(s)$*, alors* $(s[t]_{p.q})|_p = (s|_p)[t]_q$ *et* $(s[t]_{p.q})[r]_p = s[r]_p$.
- *Si* $p, q \in Pos(s)$ *et* $p \bowtie q$*, alors* $(s[t]_p)|_q = s|_q$ *et* $(s[t]_p)[r]_q = (s[r]_q)[t]_p$.

Exercice 3 **[Paires critiques]**

Rappel: Soient $l_1 \to r_1$, $l_2 \to r_2$ deux instances de règles de réécriture sans variables communes. Soit p une position de l_1, tels que $l_1|_p$ n'est pas une variable et $l_1|_p$ et l_2 sont unifiables. Soit σ l'unificateur principal de $l_1|_p$ et l_2. Alors, la paire $< \sigma(r_1)\ ,\ \sigma(l_1)[\sigma(r_2)]|_p >$ est une *paire critique*.

1. Définir un système de réecriture sans paires critiques, puis un deuxième avec au moins une paire critique.
2. Trouver toutes les paires critiques du systeme de réecriture suivant (où, comme d'habitude, les lettres de debut d'alphabet représentent des constantes, celles de fin d'alphabet des variables):

$$\begin{array}{lcl} f(g(x,a), h(c)) & \to & i(x, a, c) \\ g(y, y) & \to & y \\ h(z) & \to & z \end{array}$$

3. On dit q'une paire critique $< t, s >$ d'un système de réecriture $\mathbb{R}$ est *joignable* s'il existe un terme r tel que $t \ \to^*_{\mathbb{R}} r$ et $s \to^*_{\mathbb{R}} r$.
   - Les paires critiques du système ci-dessus sont-elles joignables?
   - Définir une extension du système dans laquelle les paires critiques soient joignables.