Université Paris 7 - Master d'Ingéniérie Informatique, 1ère année Année 2008-2009

TD de *Sémantique des langages de programmation* n° 1

# Induction, relations et ordres bien fondés

**Definition 1 (Ordre bien fondé)** *Une relation d'ordre* $> \subseteq E \times E$ *est* bien fondée *si il n'existe pas de suite infinie d'éléments de E décroissante par rapport à* $>$.

**Exercice 1** (Constructions) Étant donnés deux ordres bien fondés $(A, >_A)$ et $(B, >_B)$, indiquer lesquels parmis les suivants sont aussi des ordres bien fondés:

1. $(A \times B, >_{A \times B})$ avec $(a,b) >_{A \times B} (a',b')$ ssi $a >_A a'$ et $b >_B b'$
2. $(A \times B, >_{A \times' B})$ avec $(a,b) >_{A \times' B} (a',b')$ ssi $a >_A a'$ et $b = b'$ ou $a = a'$ et $b >_B b'$
3. $(A \uplus B, >_{A \uplus B})$ avec $e >_{A \uplus B} e'$ ssi $e = in_1(a)$, $e' = in_1(a')$ et $a >_A a'$ ou $e = in_2(b)$, $e' = in_2(b')$ et $b >_B b'$

**Exercice 2** (soustraction entière) Considérons l'opération suivante sur les couples d'entiers

$$\begin{array}{rcl} sub(n,0) & = & n \\ sub(0,m) & = & 0 \\ sub(n,m) & = & sub(n-1,m-1) \end{array}$$

Montrez par induction bien fondée que

- elle est bien définie pour toute couple d'entiers
- $\forall m,n.sub(n,m) \leq n$

**Exercice 3** Considérez les multi-ensembles finis d'entiers naturels avec l'ordre induit par l'ordre des entiers.

1. Les suites suivantes sont-elles croissantes ? décroissantes ?
   (a) $\{42\};\{21,21,24,30\};\{12,12,12,12,21\};\{2\}$
   (b) $\{\};\{5\};\{4,3,2,1,0\}$
2. Donner une suite de longueur 321 partant de $\{2\}$.
3. Donner une suite de longueur 1234567890 partant de $\{2\}$.
4. Existe-t-il un maximum et un minimum des multi-ensembles finis d'entiers naturels ?

**Exercice 4** (Terminaison de la visite en largeur d'un arbre) Considérons la fonction `bfvisit`:

```
type 'a tree = Leaf of 'a | Node of 'a * ('a tree list) ;;

let rec bfv =
   function
      ([],acc) = acc
   |  ((Leaf v)::r,acc)  = bfv(r,v::acc)
   |  ((Node (v,vl))::r,acc) = bfv(r@vl,v::acc)
 ;;

let bfvisit t = bfv([t],[]);;
```

En utilisant un ordre multiset, montrez que

1. `bfvisit` termine toujours quand ell'est appelee sur la racine d'un arbre fini;

2. `bfvisit` termine toujours quand ell'est appelee sur la racine d'un DAG fini.

**Definition 2 (Relation bien fondée)** *Une relation $R \subseteq E \times E$ est* bien fondée *si tout sousensemble non vide de $E$ admet un plus petit élément par rapport à $R$.*

**Exercice 5** Prouver que le principe d'induction bien fondée est valable aussi pour toutes les relations $R \subseteq E \times E$ bien fondées (même si elles ne sont pas des ordres).

**Exercice 6** Prouver qu'une relation bien fondée n'admet pas de chaîne strictement décroissantes infinies.

## Réécriture

Rappel des notations:

Soit $R \subseteq A \times A$ une relation.

| | |
|---|---|
| $a \to_R b$ | $(a,b) \in R$ |
| $a \to_R^* b$ | $\exists n \geq 0\ \exists a_0, \ldots, a_n \in A\ a = a_0 \to_R a_1 \to_R \ldots \to_R a_{n-1} \to_R a_n = b$ |
| $a \to_R^+ b$ | $\exists n \geq 1\ \exists a_0, \ldots, a_n \in A\ a = a_0 \to_R a_1 \to_R \ldots \to_R a_{n-1} \to_R a_n = b$ |
| $a \to_R^= b$ | $a = b$ ou $a \to_R b$ |
| $a \leftrightarrow_R b$ | $(a,b) \in R$ ou $(b,a) \in R$ |
| $a \leftrightarrow_R^* b$ | $\exists n \geq 0\ \exists a_0, \ldots, a_n \in A\ a = a_0 \leftrightarrow_R a_1 \leftrightarrow_R \ldots \leftrightarrow_R a_{n-1} \leftrightarrow_R a_n = b$ |

**Exercice 7** Une relation $R \subseteq A \times A$ a la *propriété du diamant* si

$$\forall a,b,c \in A\ [(a,b),(a,c) \in R \Rightarrow\ \exists d \in A(b,d),(c,d) \in R]$$

Ce qu'on peut écrire:

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "R"] \arrow[d, "R"] & b \arrow[d, "R"] \\ c \arrow[r, "R"] & d \end{tikzcd}$$

- Montrer qu'une relation qui a la propriété du diamant est confluente.
- Donner un exemple de relation confluente qui n'a pas la propriété du diamant.

**Exercice 8** Prouver qu'un relation fortement confluente est confluente.

**Exercice 9** Deux relations $R,S \subseteq A \times A$ *commutent* si:

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "S^*"] \arrow[d, "R^*"] & b \arrow[d, "R^*"] \\ c \arrow[r, "S^*"] & d \end{tikzcd}$$

Soient $R,S \subseteq A \times A$. Prouver que $R \bigcup S$ est confluente si

- $R$ est confluente, $S$ est confluente et $R$ et $S$ commutent.

**Exercice 10** Prouver que si:

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "S"] \arrow[d, "R"'] & b \arrow[d, "R^*"] \\ c \arrow[r, "S^="] & d \end{tikzcd}$$

alors $R$ et $S$ commutent.

**Exercice 11** Soit $\mathscr{A}$ un ensemble d'objets sur lequel on considère $n \geq 0$ systèmes de réécriture $R_1, \ldots, R_n$. Soit $S = R_1 \cup \ldots \cup R_n$. On considère la propriété suivante :

*Pour tout $i \in \{1 \ldots n\}$ pour tout $s, t, u$ :*
*si $s \rightarrow_{R_i} t$ et $s \rightarrow_S u$, alors*

> *soit il existe un terme $v$ et deux indices $k, l < i$ t.q. $t \rightarrow_S^* v$ et $u \rightarrow_{R_k}^* \rightarrow_{R_l}^* v$,*
> *soit il existe un terme $v$ t.q. $t \rightarrow_S^* v$ et $u = v$*

1. Montrer que le système $S$ est confluent dans le cas $n = 1$.

2. Pour $n = 2$ énumérer tous les diagrammes possibles, c'est à dire, pour chaque divergence de la forme $s \rightarrow_{R_i} t$ et $s \rightarrow_S u$ (avec $i \in \{1, 2\}$) donner tous les diagrammes possibles qui ferment cette divergence.

3. Montrer que $S = R_1 \cup \ldots \cup R_n$ est confluent dans le cas général.

   (Suggestion: utiliser un argument d'induction sur un multi-ensemble approprié).